На правах рукописи

Кош

Кошелев Антон Александрович

# Наилучшее равномерное приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

Екатеринбург
2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Уральского федерального университета, г. Екатеринбург

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Арестов

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук А. Л. Агеев

кандидат физико-математических наук Р. Р. Акопян

**Ведущая организация:**
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Защита диссертации состоится ***27 октября 2011 г.*** в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан 23 сентября 2011 г.



Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02,
доктор
физико-математических наук Н. Ю. Антонов

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе изучается задача Стечкина о наилучшем приближении оператора Лапласа линейными ограниченными операторами и родственные ей задачи. Таковыми являются задача о модуле непрерывности оператора Лапласа, связанное с ней неравенство типа Колмогорова и задача оптимального восстановления значений оператора Лапласа на функциях, заданных с ошибкой.

Приведем точную постановку обозначенных задач. Пусть $C(\mathbb{R}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, – пространства функций $m$ переменных, определенных на $\mathbb{R}^m$ $(m \ge 2)$, с обычным определением нормы. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$. На дважды дифференцируемых функциях оператор Лапласа $\Delta$ определяется как сумма вторых частных производных функции по всем переменным. На классы менее гладких функций оператор Лапласа (и его степени) распространяются по схеме Соболева (см., например, [23]).

Обозначим через $W_p^{2n} = W_p^{2n}(\mathbb{R}^m)$ при $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, пространство функций $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. В случае $p = \infty$ через $W_\infty^{2n} = W_\infty^{2n}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in C(\mathbb{R}^m)$, у которых $\Delta^n f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В пространстве $W_p^{2n}$ $(1 \le p \le \infty)$ выделим (выпуклый центрально симметричный) класс функций $Q_p^{2n} = \{f \in W_p^{2n} : \|\Delta^n f\|_p \le 1\}$. Пусть $\mathcal{L}_p$ – множество линейных ограниченных операторов из $L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 \le p < \infty$, и из $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$ при $p = \infty$. Обозначим через $\mathcal{L}_p(N)$ множество операторов из $\mathcal{L}_p$, нормы которых (в $\mathcal{L}_p$) ограничены положительным числом $N$.

При натуральных $0 < k < n$ и вещественном $N > 0$ положим

$$E(N) = E(N)_p = E(N; k, n)_p = \inf\{U(T)_p : \|T\|_{\mathcal{L}_p} \le N\}, \qquad (1)$$

$$U(T)_p = \sup\{\|\Delta^k f - Tf\|_p : f \in Q_p^{2n}\}, \quad T \in \mathcal{L}_p(N). \qquad (2)$$

Величину (1) называют наилучшим приближением $k$-й степени $\Delta^k$ оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классе функций $Q_p^{2n}$. Эта задача является частным случаем задачи С. Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов [12]. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Для неотрицательного числа $\delta$ положим

$$\omega(\delta) = \omega(\delta)_p = \sup\{\|\Delta^k f\|_p : f \in Q_p^{2n}, \ \|f\|_p \le \delta\}; \qquad (3)$$

эту функцию переменного $\delta > 0$ называют модулем непрерывности оператора $\Delta^k$ на классе $Q_p^{2n}$. Нетрудно убедиться (см. [1, § 4, формула (4.6)]), что для модуля непрерывности (3) справедливо равенство

$$\omega(\delta)_p = \mathcal{K}_p\, \delta^{\frac{n-k}{n}}, \tag{4}$$

где $\mathcal{K}_p = \omega(1)_p$ есть точная (наименьшая возможная) константа в неравенстве Колмогорова

$$\|\Delta^k f\|_p \le \mathcal{K}_p \cdot \|f\|_p^{\frac{n-k}{n}} \cdot \|\Delta^n f\|_p^{\frac{k}{n}}, \quad f \in W_p^{2n}(\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

Для оператора $T \in \mathcal{L}_p$ и числа $\delta > 0$ полагаем

$$U_\delta(T) = \sup\{\|\Delta^k f - T\eta\|_p : \ f \in \ Q_p^{2n}, \ \eta \in L_p(\mathbb{R}^m), \ \|f - \eta\|_p \le \delta\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) = \inf\{U_\delta(T) : T \in \mathcal{L}_p\} \tag{6}$$

есть величина ошибки оптимального восстановления $k$-й степени оператора Лапласа $\Delta^k$ с помощью множества линейных методов восстановления на элементах класса $Q_p^{2n}$, заданных с известной погрешностью $\delta$.

**Актуальность темы.** Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С. Б. Стечкина в 1965 году [1]. В его работе [12] была приведена постановка задачи, получены первые принципиальные результаты и дано решение задачи наилучшего приближения операторов дифференцирования малого порядка. Задача Стечкина интенсивно изучалась в течение более чем 40 лет в работах С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, В. И. Бердышева, А. П. Буслаева, В. Н. Габушина, Ю. Н. Субботина, Л. В. Тайкова и других (см. обзорные статьи [1, 2]). Изучение задачи Стечкина происходило в тесной взаимосвязи с исследованием экстремальных задач теории приближения функций, теории некорректных задач, вычислительной математики. Задача Стечкина (в особенности, задача о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами в функциональных пространствах на числовой оси и полуоси) с одной стороны и точные неравенства между нормами производных дифференцируемых функций (неравенства Колмогорова) с другой стороны оказали большое взаимное влияние. Существенное влияние на изучение задачи Стечкина оказали также исследования некорректной задачи оптимального восстановления значений неограниченного оператора на элементах, заданных с ошибкой (А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов, В. Н. Страхов, С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, В. Н. Габушин, В. Г. Романов, В. А. Морозов, В. В. Васин, В. П. Танана, В. Я. Арсенин, В. В. Иванов, В. А. Винокуров, А. И. Гребенников, А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, Ш. Мичелли, Т. Ривлин, Дж. Трауб, Х. Вожняковский, А. Л. Агеев, Б. Боянов, Г. Г. Магарил-Ильяев, А. А. Женсыкбаев и многие другие, см. монографии [5, 7, 8, 11, 13, 21], работы [1, 2, 6, 25] и приведенные в них дальнейшие ссылки). В настоящее время хорошо изучены неравенства Колмогорова для дифференцируемых функций на оси и полуоси; такие неравенства изучали Е. Ландау, Дж. Адамар, Ю. Г. Боссе (Г. Е. Шилов), А. Н. Колмогоров, С.-Надь, Г. Г. Харди, Дж. И. Литтльвуд, Г. Полиа, А. П. Маторин, И. Стейн, Ю. И. Любич, С. Б. Стечкин, В. Н. Габушин, Л. В. Тайков, И. Домар, В. В. Арестов, Н. П. Корнейчук, И. Шенберг, А. Каваретта, В. И. Бердышев, Н. П. Купцов, В. Г. Соляр, М. К. Квонг, А. Зеттл, В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, В. А. Кофанов и многие другие, см. монографии [3,22], работы [1,2,9,20] и приведенную там библиографию.

К настоящему времени выяснена взаимосвязь задачи наилучшего приближения неограниченных операторов ограниченными с другими экстремальными задачами. Получен ряд общих теорем существования и характеризации экстремального приближающего оператора. Наиболее полно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка $k$ на классе $n$ раз дифференцируемых функций ($0 \leq k < n$) в пространствах $L_p = L_p(S)$ на числовой оси $S = (-\infty, \infty)$ и полуоси $S = [0, \infty)$. Для операторов дифференцирования в частных производных на классах функций многих переменных вычислено наилучшее приближение ограниченными операторами и найдена наилучшая константа в соответствующем неравенстве Колмогорова лишь в ряде случаев (В. Н. Коновалов [10], А. П. Буслаев [4], В. Г. Тимофеев [15, 16], О. А. Тимошин [17, 18], Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков [14]).

В диссертационной работе для случая $k = 1, n = 2$ получены двусторонние оценки величины наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами, величины ошибки оптимального восстановления оператора Лапласа по функции, заданной с ошибкой, на классе $Q_p^4$ ($1 \leq p \leq \infty$), а также константы в соответствующем неравенстве Колмогорова. В задаче Стечкина выписан оператор, уклонение которого от оператора Лапласа близко к наилучшему.

Для случая произвольных натуральных $1 \le k < n$ при $p = 2$, $m \ge 2$ исследуемые задачи были решены В. Г. Тимофеевым [16], в частности им было доказано, что $\mathcal{K}_2 = 1$. Эти результаты были получены с помощью метода, который Ю.Н. Субботин и Л.В. Тайков [14] применяли в соответствующем одномерном случае.

О. Кунчев [24] получил для наилучшей константы $\mathcal{K}_\infty$ в неравенстве Колмогорова (5) в случае $p = \infty$, $m \ge 2$ оценку сверху

$$\mathcal{K}_\infty \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}. \tag{7}$$

В данной работе улучшена оценка сверху (7) в случаях $m = 2, 3$, а также получена оценка снизу константы $\mathcal{K}_\infty$ при любом $m \ge 2$.

**Цель работы.** Изучение наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на классе функций, у которых вторая степень оператора Лапласа ограниченна, в метриках $C(\mathbb{R}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^m)$ $(m \ge 2,\ 1 \le p \le \infty)$. Построение приближающего оператора, уклонение которого от оператора Лапласа близко к минимальному. Изучение неравенства типа Колмогорова между нормой оператора Лапласа, нормой функции и нормой второй степени оператора Лапласа в пространствах $C(\mathbb{R}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^m)$ $(m \ge 2,\ 1 \le p \le \infty)$. Изучение оптимального восстановления оператора Лапласа по функциям из класса, заданных с известной погрешностью.

**Методы исследования.** Из общей теории известны соотношения между модулем непрерывности линейного неограниченного оператора на классе элементов, наилучшим приближением этого оператора линейными ограниченными операторами и некорректной задачей оптимального равномерного восстановления значений такого оператора на элементах класса, заданных с известной погрешностью. Как частный случай общих результатов С. Б. Стечкина справедливо следующее утверждение (см., например, [1,2]).

**Теорема А.** *При $m \ge 2$, $1 \le p \le \infty$ для величин* (1), (3), (6) *справедливы следующие соотношения:*

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}_p) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}_p) \le \inf\{E(N) + N\delta : N \ge 0\}, \quad \delta > 0; \tag{8}$$

$$E(N) \ge \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta \ge 0\}, \quad N > 0. \tag{9}$$

Если в теореме А с помощью соотношения (4) от модуля непрерывности $\omega(\delta)$ перейти к наилучшей константе $\mathcal{K}_p$ в неравенстве Колмогорова (5), то неравенства (8) и (9) примут следующий вид:

$$\mathcal{K}_p\, \delta^{\frac{n-k}{n}} \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}) \le \inf\{E(N) + N\delta : N > 0\}, \quad \delta > 0, \tag{10}$$

$$E(N) \geq \frac{k}{n}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{k}} \mathcal{K}_p^{\frac{n}{k}} N^{-\frac{n-k}{k}}, \quad N > 0. \tag{11}$$

Из приведенных соотношений видно, что для нахождения двусторонних оценок величин (1), (6) и наилучшей константы в неравенстве (5) достаточно получить оценку снизу для наилучшей константы и оценку сверху для величины наилучшего приближения (1). Чтобы получить оценку снизу константы в неравенстве (5), нужно удачно выбрать функцию $f \in W_p^{2n}(\mathbb{R}^m)$. Оценкой сверху для величины наилучшего приближения (1) служит уклонение $k$-й степени оператора Лапласа от хорошо подобранного приближающего оператора.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем.

1. В случае равномерной метрики $C(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, для функций многих переменных получены близкие двусторонние оценки величины наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами, величины ошибки оптимального восстановления значений оператора Лапласа на множестве функций, заданных с ошибкой. Выписан оператор, уклонение которого от оператора Лапласа близко к минимальному. Получена оценка снизу наилучшей константы в соответствующем неравенстве Колмогорова.

2. В случаях $C(\mathbb{R}^2)$ и $C(\mathbb{R}^3)$ улучшена оценка сверху величины наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами, на этом пути улучшена оценка сверху величины ошибки оптимального восстановления значений оператора Лапласа на множестве функций, заданных с ошибкой, и наилучшей константы в неравенстве Колмогорова по сравнению с известными.

3. В случае интегральной метрики $L_p(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq p < \infty)$ получены близкие двусторонние оценки величины наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами, величины ошибки оптимального восстановления значений оператора Лапласа на множестве функций, заданных с ошибкой, и наилучшей константы в соответствующем неравенстве Колмогорова.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Получены близкие двусторонние оценки изучаемых величин в пространствах $C(\mathbb{R}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$. Построен приближающий оператор, уклонение которого от оператора Лапласа близко к оптимальному. Построенный приближающий оператор может быть применен для восстановления значений оператора Лапласа на функциях из соответствующего класса, заданных с известной погрешностью. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения наилучшего приближения оператора Лапласа и его степеней, а также более общих дифференциальных операторов линейными ограниченными операторами, соответствующих точных неравенств Колмогорова, а также величины ошибки оптимального восстановления дифференциального оператора по функциям, заданным с ошибкой.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на следующих математических конференциях и научных семинарах: летние математические Школы С. Б. Стечкина по теории функций (2006, 2007, 2008, 2010); 38-я, 41-я и 42-я Всероссийские молодежные конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (г. Екатеринбург, 2007, 2010, 2011); второй международный семинар «Экстремальные задачи в анализе Фурье», институт им. А. Реньи, Будапешт, Венгрия (2007); международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная 100-летию со дня рождения В. К. Иванова, Екатеринбург (2008); международная конференция «Теория приближений», Санкт-Петербург (2010); международная конференция «Теория приближений и ее приложения», посвященная 90-летию со дня рождения академика НАН Украины Н. П. Корнейчука, Днепропетровск, Украина (2010); научный семинар под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора В. В. Арестова в Уральском государственном университете им. А. М. Горького (2007–2011); научный семинар под руководством доктора физ.-мат. наук, члена-корреспондента РАН, профессора В. В. Васина в Институте математики и механики (ИММ) УрО РАН (2010); научный семинар под руководством доктора физ.-мат. наук, члена-корреспондента РАН, профессора Ю. Н. Субботина и доктора физ.-мат. наук, заслуженного деятеля науки, профессора Н. И. Черных в ИММ УрО РАН (2008, 2011).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы автором в работах [26–36].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Объем диссертации – 62 страницы. Список литературы содержит 53 наименования.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится постановка изучаемых в работе задач, рассматривается краткая история исследования, приводится взаимосвязь задач и общие методы исследования.

**Обзор результатов главы 1.** В первой главе рассматриваются следующие задачи: задача о наилучшем равномерном приближении оператора Лапласа линейными ограниченными операторами; задача о модуле непрерывности оператора Лапласа; неравенство Колмогорова между нормой оператора Лапласа функции, нормой самой функции и нормой второй степени оператора Лапласа этой функции; задача об оптимальном восстановлении значений оператора Лапласа по функциям, заданным с погрешностью, в случае равномерной метрики $C(\mathbb{R}^m)$ при $m \geq 2$.

В качестве приближающего взят оператор

$$(T_{h,m}f)(X) = -\frac{2m}{h^2}f(X) + \frac{2m}{h^2}(J_{h,m}f)(X), \tag{12}$$

зависящий от параметра $h > 0$; здесь $(J_{h,m}f)(X)$ — среднее значение функции $f$ на $m$-мерной сфере радиуса $h$ с центром в точке $X$.

*Для оператора $T_{h,m}$ при любом $h > 0$ на множестве функций $W^4_\infty$ имеет место равенство*

$$(\Delta\varphi)(X) - (T_{h,m}\varphi)(X) = \int\limits_{\|Y\|\leq h} \psi_{h,m}(Y)\ (\Delta^2\varphi)(X+Y)\,dY, \tag{13}$$

*в котором $\psi_{h,m}$ есть радиальная функция специального вида.*

Представление (13) позволяет получить оценку сверху для величины уклонения (2) и, как следствие, оценку сверху для величины наилучшего приближения (1). Оценка снизу наилучшей наилучшей константы $\mathcal{K}_\infty$ в неравенстве Колмогорова получена с помощью радиальной функции, сужение которой на полуось $[0,\infty)$ является идеальным сплайном Эйлера 4-й степени.

На этом пути доказано следующее утверждение, являющееся основным в первой главе.

**Теорема 1.** *При $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$, $m \geq 2$ для величин наилучшего приближения, модуля непрерывности, величины ошибки оптимального восстановления и наилучшей константы $\mathcal{K}_\infty$ в неравенстве Колмогорова справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$\frac{0.9m}{(m+2)N} \leq E(N)_\infty \leq \frac{m}{(m+2)N}, \quad N > 0,$$

$$\sqrt{\frac{18}{5}}\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2} \leq \omega(\delta)_\infty \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_\infty) \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$\sqrt{\frac{18}{5}}\sqrt{\frac{m}{m+2}} \leq \mathcal{K}_\infty \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}.$$

Опишем кратко распределение материала первой главы по параграфам. В первом параграфе строится и исследуется приближающий оператор (12). Во втором параграфе обосновано представление (13) разности оператора Лапласа и приближающего оператора (12) через вторую степень оператора Лапласа. Представление (13) вначале (с использованием фундаментальных функций оператора Лапласа и его второй степени) доказывается на множестве основных функций $\mathcal{D}$. Затем по схеме Соболева это представление распространяется на множество $W^4_\infty$. С помощью этого представления получена оценка сверху для величины наилучшего приближения (1). В третьем параграфе строится оценка снизу для наилучшей константы в неравенстве Колмогорова. Эти результаты дали двусторонние оценки значений изучаемых задач.

Результаты первой главы были анонсированы автором в [29, 30, 35, 36] и опубликованы с доказательством в [27, 28].

**Обзор результатов главы 2.** В этой главе улучшены полученные в первой главе оценки сверху изучаемых задач в случаях $m = 2, 3$. Для этого следующим образом модифицирован приближающий оператор. При $h > 0$ и $\gamma > 1$ определим (линейный ограниченный в $C(\mathbb{R}^m)$) оператор $T_{\gamma,h,m}$ формулой

$$(T_{\gamma,h,m}f)(X) = Af(X) - B(J_{h,m}f)(X) - C(J_{\gamma h,m}f)(X), \tag{14}$$

где коэффициенты $A, B, C$ удовлетворяют следующим соотношениям: $A = B + C$, $2m + Bh^2 + C(\gamma h)^2 = 0$. Эти соотношения получены из условия совпадения оператора $T_{\gamma,h,m}$ с оператором Лапласа $\Delta$ на ядре второй степени оператора Лапласа $\Delta^2$.

По той же схеме, как это было сделано в первой главе, но уже с помощью оператора (14) доказывается следующее утверждение, являющееся основным во второй главе.

**Теорема 2.** *При $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$ для величины наилучшего приближения, модуля непрерывности, величины ошибки оптимального восстановления и наилучшей константы $\mathcal{K}_\infty$ в неравенстве Колмогорова справедливы следующие двусторонние оценки:*
*в случае $m = 2$*

$$\frac{0.45}{N} \le E(N)_\infty \le \frac{0.4955}{N}, \quad N > 0,$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}}\,\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_\infty \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_\infty) \le 2\sqrt{0.4955}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$\sqrt{\frac{9}{5}} \le \mathcal{K}_\infty \le 2\sqrt{0.4955};$$

*в случае* $m = 3$

$$\frac{0.54}{N} \le E(N)_\infty \le \frac{0,5995}{N}, \quad N > 0,$$

$$2\sqrt{0.54}\,\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_\infty \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_\infty) \le 2\sqrt{0,5995}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$2\sqrt{0.54} \le \mathcal{K}_\infty \le 2\sqrt{0,5995}.$$

Опишем кратко распределение материала второй главы по параграфам. В первом параграфе строится и изучается приближающий оператор (14). Во втором параграфе аналогично главе 1 строится представление разности оператора Лапласа и приближающего оператора (14) сначала на множестве основных функций, а затем на пространстве $W^4_\infty$. С помощью этого представления получается оценка сверху уклонения приближающего оператора от оператора Лапласа. На этом этапе специальным образом выбираются два оставшихся параметра $C$ и $\gamma$ оператора (14). Оценка сверху уклонения уточненного оператора дает оценку сверху для наилучшего приближения оператора Лапласа линейными ограниченными операторами. В результате получаем улучшенные оценки сверху изучаемых величин в случаях $m = 2, 3$. Теорема 2 даёт оценки сверху для константы в неравенстве Колмогорова при $m = 2, 3$, лучшие, чем у О. Кунчева [24].

Результаты второй главы анонсированы автором в [29, 30, 35, 36] и опубликованы с доказательством в [28].

**Обзор результатов главы 3.** В третьей главе получены двусторонние оценки значений задач (1), (6) и точной константы в неравенстве (5) в пространстве $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $m \ge 2$ для $1 \le p < \infty$ в случае $k = 1, n = 2$. Оценки сверху получены с помощью операторов (12), (14) при правильном толковании интегралов по сферам в конструкции операторов. Оценка снизу константы в соответствующем неравенстве Колмогорова, а значит и величин (1), (6), получена с помощью конкретной последовательности функций из пространства $W^4_p(\mathbb{R}^m)$. Основными в третьей главе являются следующие два утверждения.

**Теорема 3.** *При* $k = 1$, $n = 2$ *для любых* $m \ge 2$ *и* $1 \le p < \infty$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{m}{(m+2)N}, \quad N > 0,$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p)p \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}.$$

В случаях $m = 2$ и $m = 3$ удается уточнить оценки сверху.

**Теорема 4.** *При* $k = 1$, $n = 2$ *для* $1 \le p < \infty$ *справедливы следующие неравенства:*
*при* $m = 2$

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{0.4955}{N}, \quad N > 0,$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) \le 2\sqrt{0.4955}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{0.4955};$$

*при* $m = 3$

$$\frac{1}{4N} \le E(N)_p \le \frac{0.5995}{N}, \quad N > 0,$$

$$\delta^{1/2} \le \omega(\delta)_p \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}_p) \le 2\sqrt{0.5995}\,\delta^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

$$1 \le \mathcal{K}_p \le 2\sqrt{0.5995}.$$

Результат В. Г. Тимофеева в работе [16] для случая $p = 2$ показывает, что оценки снизу изучаемых величин, полученные в параграфе 2, являются точными по $p$.

Опишем кратко распределение материала третьей главы по параграфам. В первом параграфе строятся и исследуются приближающие операторы для случая $m \ge 2$ и дополнительно для $m = 2, 3$. Во втором параграфе оценивается величина уклонения оператора Лапласа и приближающего оператора для случая $m \ge 2$. В третьем параграфе получается оценка величины уклонения для случаев $m = 2, 3$. В четвертом параграфе с помощью специальной последовательности функций строится оценка снизу. В итоге получаем двусторонние оценки для изучаемых величин в случае интегральной метрики $L_p(\mathbb{R}^m)$.

Результаты третьей главы анонсированы автором в [31–34] и опубликованы с доказательством в [26, 27].

Автор выражает глубокую благодарность моему учителю Виталию Владимировичу Арестову за постановку задач и постоянную поддержку моей работы.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Арестов, В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В.В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, вып. 6 (312). – С. 89–124.

[2] **Арестов, В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В.В. Арестов, В.Н. Габушин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – вып. 11. – С. 42–68.

[3] **Бабенко, В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. – Киев : Наукова думка, 2003. – 590 с.

[4] **Буслаев, А.П.** О приближении оператора дифференцирования / А.П. Буслаев // Мат. заметки. – 1981. – Т. 25, вып. 5. – С. 731–742.

[5] **Васин, В.В.** Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург : УИФ Наука, 1993. – 262 с.

[6] **Габушин, В.Н.** Оптимальные методы вычисления значений оператора $Ux$, если $x$ задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой / В.Н. Габушин. // Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 63–78.

[7] **Женсыкбаев, А.А.** Проблемы восстановления операторов / А.А. Женсыкбаев. – Москва – Ижевск : Сер. <Совр. математика>, 2003. – 412 с.

[8] **Иванов, В.К.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана – М. : Наука, 1978. – 206 с.

[9] **Колмогоров, А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А.Н. Колмогоров. // Избранные труды. Математика, механика. М. : Наука. – 1985. – С. 252–263.

[10] **Коновалов, В.Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных / В.Н. Коновалов // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 67–78.

[11] **Лаврентьев, М.М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 286 с.

[12] **Стечкин, С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов / С.Б. Стечкин // Мат. заметки. – 1967. – Т. 1, вып. 2. – С. 137–148.

[13] **Стечкин, С.Б.** Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М. : Наука, 1976. – 248 с.

[14] **Субботин, Ю.Н.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве $L_2$ / Ю.Н. Субботин, Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, вып. 2. – С. 157–164.

[15] **Тимофеев, В.Г.** Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных / В.Г. Тимофеев // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, вып. 2. – С. 676–689.

[16] **Тимофеев, В.Г.** Об одном экстремальном неравенстве типа Ландау с итерированными операторами Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^m)$ / В.Г. Тимофеев. // Теория функций и приближений. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 1986. – Ч. 3. – С. 112–115.

[17] **Тимошин, О.А.** Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках $L$ и $C$ на плоскости / О.А. Тимошин // Мат. заметки. – 1984. – Т. 36, вып. 3. – С. 369–375.

[18] **Тимошин, О.А.** Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядка / О.А. Тимошин // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344, № 1. – С. 20–22.

[19] **Тихомиров, В.М.** Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М. : Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.

[20] **Тихомиров, В.М.** Неравенства для производных / В.М. Тихомиров, Г.Г. Магарил-Ильяев. // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Т. 1. Математика и механика. – М. : Наука, 2005. – С. 428-431.

[21] **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 224 с.

[22] **Харди, Г.** Неравенства / Г. Харди, Дж. Литтльвуд, Г. Полиа. – М. : Изд-во иностр. лит., 1948. - 456 с.

[23] **Шилов, Г.Е.** Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

[24] **Kounchev, O.** Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality / O. Kounchev // Multivariate Approximation. Recent trends and results. Akademie Verlag. – 1997. – V. 101. – P. 123–132.

[25] **Micchelli, Ch.A.** A survey of optimal recovery / Ch.A. Micchelli, Th.J. Rivlin // Optimal estimation in approximation theory. – N.Y. etc. : Plenum Press, 1977. – P. 1–54.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


[26] **Кошелев, А. А.** Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в пространстве $L_p$ / А. А. Кошелев // Известия вузов. Математика. – 2011. – Вып. 6. – С. 63–74.

[27] **Кошелев, А. А.** The best approximation of the Laplace operator by linear bounded operators / A. A. Koshelev // Sun-Stechkin Summer School on function theory : proceedings of international conference, China, Beijing, August 13–23, 2009. – P. 47-53.

[28] **Кошелев, А. А.** Best approximation of the Laplace operator on the plane by linear bounded operators / A. A. Koshelev // East Journal on Approximations. – 2008. – V. 14, № 2. – P. 29–40.

[29] **Кошелев, А. А.** О задаче Стечкина для двумерного оператора Лапласа / А. А. Кошелев // Летняя школа С.Б. Стечкина по теории функций : труды международной конференции. – Тула : Изд-во ТулГУ. 2007. – С. 84-87.

[30] **Кошелев, А. А.** О наилучшем приближении оператора Лапласа линейными ограниченными операторами / А. А. Кошелев // Проблемы теоретической и прикладной математики : труды 38-й региональной молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2007 г. – Екатеринбург : Изд-во ИММ УрО РАН. 2007. – С. 95–99.

[31] **Кошелев, А. А.** Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами на $\mathbb{R}^3$ / А. А. Кошелев // Современные проблемы математики : тезисы докладов 42-й всероссийской молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 30 января – 6 февраля 2011 г. – Екатеринбург : Изд-во ИММ УрО РАН, 2011. – С. 134–136.

[32] **Кошелев, А. А.** Приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в $L_p$ / А. А. Кошелев // Теория приближений : тезисы докладов международной конференции, ММИ им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия, 6–8 мая 2010 г. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГУ, 2010. – С. 53–55.

[33] **Кошелев, А. А.** Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами в $L_p$ / А. А. Кошелев // Теория приближений и ее приложения : тезисы докладов международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика НАН Украины Н.П. Корнейчука, ДНУ, Днепропетровск, Украина, 14–17 июня 2010 г. – Днепропетровск : Изд-во ДНУ, 2010. – С. 60.

102

[34] **Кошелев, А. А.** О наилучшем $L_p$-приближении оператора Лапласа линейными ограниченными операторами / А. А. Кошелев // Проблемы теоретической и прикладной математики : тезисы докладов 41-й всероссийской молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 1–5 февраля 2010 г. – Екатеринбург : Изд-во ИММ УрО РАН, 2010. – С. 152–158.

[35] **Кошелев, А. А.** Наилучшее приближение оператора Лапласа линейными ограниченными операторами / А. А. Кошелев // Алгоритмический анализ неустойчивых задач : тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. К. Иванова, Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 г. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2008. – С. 65–66.

[36] **Кошелев, А. А.** Stechkin's problem on the plane for the Laplace operator / A. A. Koshelev // Second Workshop on Extremal Problems in Fourier Analysis abstracts (Renyi Institute, Budapest, 18–24 September, 2007). – Budapest : Alfred Renyi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, 2007. – P. 11–12.

Подписано в печать 19.09.2011
Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. Усл. печ. л. 1
Тираж 100 экз. Заказ № 3388.
Отпечатано в типографии ООО «Издательство УМЦ УПИ».
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
Тел.: (343) 362-91-16, 362-91-17